Rouler en accordéon

http://www.velomath.fr

En roulant en groupe avec mon club de cyclo-touristes, il est arrivé maintes fois que le groupe ou une partie du groupe accélère sans raisons apparentes, puis au bout d'un moment ralentisse, voyant que tout le monde n'a pas suivi ou que certains peinent. Cette pratique est peut-être plus ludique qu'une randonnée effectuée au métronome mais personnellement cela ne me convient pas, préférant utiliser l'énergie dépensée de cette façon pour aller plus loin car ce mode de comportement est consommateur d'énergie comme ce document va le démontrer.

Soit un cycliste A parcourant la distance d, à la vitesse constante V_0. Il mettra donc un temps t0 égal à $t_0=d/V_0$
Pour ce faire, il devra fournir une force motrice F (en newton) donnée par la relation (Voir « le vélo en équation ») :

$$F = (p+f)\frac{W}{10} + \frac{25}{324} C_x V_0^{\,2} \qquad \text{relation [1]}$$

- W est le poids cycliste + vélo en kg
- Cx est le coefficient de pénétration dans l'air propre au cycliste
- p est la pente du parcours en %
- f est le coefficient de frottement pneu-chaussée

et l'énergie E_0 qu'il devra dépenser sera :

$$E_0 = F\,d \qquad \text{relation [2]}$$

Prenons un deuxième cycliste B qui effectuera le même parcours dans le même temps t_0 mais qui ne voudra pas rouler à la même vitesse durant tout le parcours.
Il fera une distance d_1 à la vitesse V_1 et le reste du parcours, soit $d_2= d-d_1$, à la vitesse V_2.
Comme il est sensé mettre le même temps que le cycliste A, la vitesse V_2 et la vitesse V_1 sont liées.
Le temps mis pour parcourir la distance d_1 est égale à : $t_1=d_1/V_1$
Le temps mis pour parcourir la distance d_2 est égale à : $t_2=d_2/V_2$
On aura donc la relation :

$$t_1 + t_2 = \frac{d_1}{V_1} + \frac{d_2}{V_2} = \frac{d}{V_0}$$

Si le cycliste parcourt la distance d_1 à la vitesse V_1, il parcourra alors le reste du parcours $d_2=d-d_1$ à la vitesse V_2 donnée par :

$$V_2 = \frac{d - d_1}{\dfrac{d}{V_0} - \dfrac{d_1}{V_1}}$$

Pour effectuer le parcours, il fournira une force motrice F1 pour rouler à la vitesse V_1 et une force F_2 pour rouler à la vitesse V_2. Ces forces sont données par les relations suivantes :

$$F_1 = (p+f)\frac{W}{10} + \frac{25}{324} C_x V_1^2$$
$$F_2 = (p+f)\frac{W}{10} + \frac{25}{324} C_x V_2^2$$

L'énergie totale à fournir est donc :

$$E = E_1 + E_2 = F_1 d_1 + F_2 d_2$$

$$E = (p+f)\frac{W}{10} d + \frac{25}{324} C_x (d_1 V_1^2 + d_2 V_2^2) \qquad \text{relation [3]}$$

Existe-t-il une paire de valeur V_1, V_2 pour laquelle l'énergie E est minimum ?
Pour cela, il faut trouver le minimum de la fonction :

$$d_1 V_1^2 + d_2 V_2^2$$

Sachant que les variables d_1, d_2 et V_1, V_2 sont liées par les relations :

$$d_1+d_2=d$$
$$V_2 = \frac{d - d_1}{\frac{d}{V_0} - \frac{d_1}{V_1}}$$

On peut démontrer que le minimum correspond à :

$$V_1=V_0 \quad \text{et} \quad d_1=d \quad d_2=0$$

On en tire donc la conclusion que la dépense minimale d'énergie sera obtenue lorsque le parcours sera effectué à vitesse constante.

Application

Effectuons un parcours de 100 km à la vitesse de 25 km/h. Nous mettrons 4 heures.
Adoptons d'autres allures tout en effectuant le parcours en 4 heures : commençons par parcourir une distance d_1 à la vitesse V_1.
Le tableau 1 à double entrée donne la vitesse V_2 à respecter dans la seconde partie du parcours.
Sur la première ligne, on trouvera la vitesse V_1 allant de 30 à 50 km/h
Dans la première colonne, on trouvera la distance d_1 durant laquelle on a roulé à la vitesse V_1.
Ainsi, si l'on roule durant 20 km à 35 km/h, il faudra rouler à 23,3 km/h durant la seconde partie du parcours.

Tableau 1. Relation entre la vitesse V_1 et la vitesse V_2

		vitesse V1 en km/h				
d1 km	d2 km	30	35	40	45	50
0	100	25,0	25,0	25,0	25,0	25,0
10	90	24,5	24,2	24,0	23,8	23,7
20	80	24,0	23,3	22,9	22,5	22,2
30	70	23,3	22,3	21,5	21,0	20,6
40	60	22,5	21,0	20,0	19,3	18,8
50	50	21,4	19,4	18,2	17,3	16,7
60	40	20,0	17,5	16,0	15,0	14,3
70	30	18,0	15,0	13,3	12,3	11,5
80	20	15,0	11,7	10,0	9,0	8,3
90	10	10,0	7,0	5,7	5,0	4,5
100	0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

L'important, c'est de comparer les énergies fournies dans ces différentes configurations.
Adoptons les valeurs suivantes pour caractériser le cycliste :

- Poids cycliste + vélo = 85 kg
- Coefficient de pénétration dans l'air Cx=0,2
- Pente du parcours nulle p=0
- Coefficient de frottement f=1

Avec ces paramètres, l'énergie fournie en effectuant le parcours à une vitesse constante de 25 km/h, exprimée en kilo-Joules, (relation [2]) est égale à : 1815 kJ
En parcourant 20 km à 35 km/h et 80 km à 23,3 km/h, l'énergie totale fournie sera de 1900 kJ, soit 5 % en plus.
Le tableau 2 donne en pourcentage par rapport au cas où le parcours est effectué à vitesse constante la dépense d'énergie supplémentaire dans les mêmes situations que celles du tableau 1.

Tableau 2. Energie supplémentaire à fournir

		vitesse V1 en km/h				
d1 km	d2 km	30	35	40	45	50
0	100	0%	0%	0%	0%	0%
10	90	1%	2%	5%	8%	11%
20	80	1%	5%	10%	16%	23%
30	70	2%	8%	15%	25%	36%
40	60	3%	11%	22%	35%	50%
50	50	5%	15%	29%	46%	65%
60	40	6%	20%	37%	58%	81%
70	30	9%	26%	47%	71%	99%
80	20	12%	33%	57%	86%	118%
90	10	17%	41%	70%	102%	138%
100	0	23%	51%	83%	119%	159%

On constate donc que si l'on s'amuse tout au long du parcours à accélérer pour se détacher du peloton puis à ralentir pour l'attendre la dépense énergétique sera plus importante.
Personnellement, je préfère utiliser cette énergie pour aller plus loin.