Le mouvement de pédalage
La vitesse angulaire du plateau

Jacques Fine mars 2015 contact@velomath.fr

Dans le mouvement de pédalage, lors d'un tour du plateau, le cycliste n'exerce pas un couple constant sur les manivelles, comme le montrent tous les tests que l'on peut faire en disposant des capteurs de force sur le pédalier. Même sans mesures, chaque cycliste se rend bien compte que l'effort qu'il exerce sur les pédales aux points « morts » est bien inférieur à celui exercé lorsque les manivelles sont horizontales. Cette variation de la poussée sur les pédales au cours d'un tour s'accompagne-t-elle d'une variation de la vitesse de rotation du plateau ?
La vitesse de rotation du plateau s'exprime généralement par la cadence de pédalage évaluée en nombre de tours par minute mais la cadence est une estimation de la vitesse moyenne de rotation. En effet, lors d'un tour le plateau, la vitesse de rotation peut varier, c'est pourquoi il vaut mieux parler de la « vitesse angulaire » du plateau et pour être encore plus clair de la « **vitesse angulaire instantanée** » qu'il faut bien distinguer de la cadence.
La vitesse angulaire s'exprime en radian par seconde que l'on écrit rad/s. Le radian est l'unité d'angle dans le système d'unité international Un tour complet correspond à 2π rad (360 degré), un demi-tour à π rad (180 degré), un quart de tour à π/2 rad (90 degré).
Un tour par seconde que l'on écrit 1 tr/s correspond à 2π rad/s soit 6.28 rad/s Ainsi, une cadence de pédalage de 60 tr/min, soit 1 tr/s, correspond à une vitesse de 6.28 rad/s.

Nous nous proposons de faire une analyse mécanique de la question avec comme objectif de voir ce que cela implique sur la vitesse du cycliste. En effet, peut-on rouler à vitesse constante alors que tout est irrégulier, l'effort ainsi que la vitesse angulaire ?

Equilibre des couples

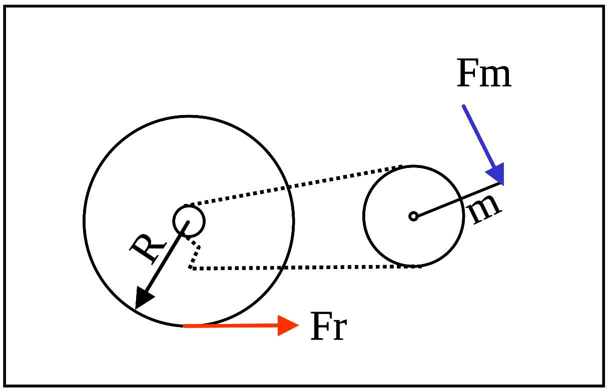

Fig.1. Couple moteur et couple résistant

En roulant, le cycliste exerce une force motrice sur les manivelles, donc un couple, et ce couple doit être égal au couple résistant comme on l'a vu dans le document « Le vélo en équation ».

La force résistante exprimée en Newton est donnée par la relation :

$$\boxed{F_r = (p+f)\,W + Cx\,V^2} \qquad [1]$$

avec les notations suivantes :

- W le poids cumulé du cycliste et du vélo en Newton

- V la vitesse du cycliste en m/s
- p la pente de la route (6% s'écrit 0.06)
- f le coefficient de frottement roues/chaussée (voisin de 0.01)
- Cx le coefficient de pénétration dans l'air (voisin de 0.2)
- l'unité de temps est la seconde

Le couple résistant correspondant à cette force est R F_r où R est le rayon de la roue arrière.

La force motrice peut se mesurer lors de tests en disposant un capteur de force sur le plateau. Cette force n'est pas constante lors d'un tour du plateau, elle est nettement plus forte lorsque la manivelle est horizontale que lorsque la manivelle est verticale c'est-à-dire aux points morts. Dans le document « Mouvement de pédalage », on a proposé une formulation mathématique de cette force, en ajustant une fonction analytique aux résultats des tests. Ainsi la force motrice peut s'exprimer de façon assez satisfaisante par la relation :

$$\boxed{F_m = H\,|\cos^n\theta| + |V \sin^n\theta|} \qquad [2]$$

- θ est l'angle de la manivelle, égal à 0 lorsque la manivelle est verticale au point mort haut
- H et V sont deux paramètres : H représente la poussée horizontale au point mort haut et V représente la poussée verticale lorsque la manivelle est horizontale.
- n est un paramètre variant entre 2 et 3

Les paramètres H, V et n sont propres à chaque cycliste, chaque individu ayant une façon différente de pédaler.
La figure 2 présente le résultat d'une mesure du couple moteur et sa modélisation par une fonction du type [2].

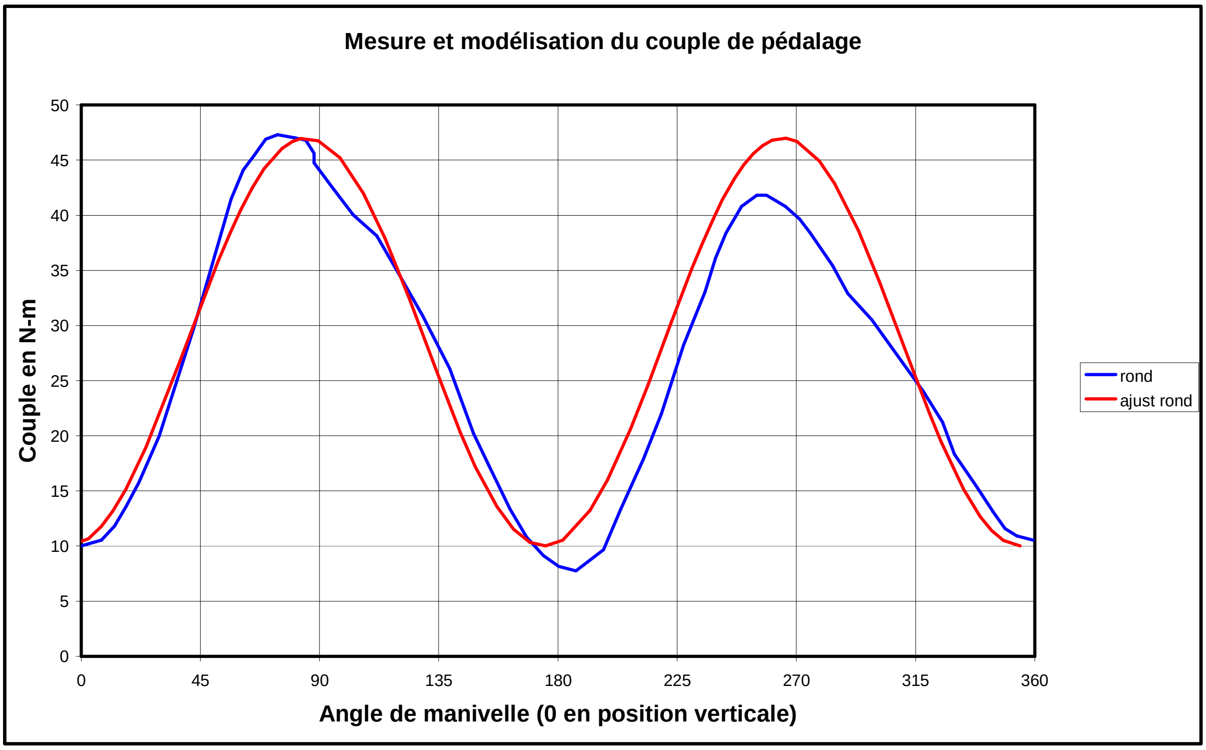

Fig.2. Mesure du couple moteur et sa modélisation

Le couple moteur correspondant à la force motrice est : m F_m où m désigne la longueur de la manivelle. Le couple moteur devant être égal au couple résistant, il faut donc que : m F_m=R F_r
Or, si le cycliste veut rouler à une vitesse constante, on voit que le couple résistant est constant alors que le couple moteur est variable : **<u>il ne peut pas y avoir égalité permanente entre ces deux couples</u>**.

La roue libre

Tout cycliste connaît bien l'existence et le rôle de la roue libre qui lui permet notamment d'arrêter de pédaler tout en continuant à rouler.
Prenons un vélo sans roue libre. Si la vitesse angulaire du plateau est ω, la vitesse angulaire ω' de la roue arrière sera obligatoirement :

$$\omega' = \omega \frac{r}{p}$$

où r est le rayon du plateau à l'instant t et p le rayon du pignon. Pour un plateau circulaire, cela peut encore s'écrire

$$\omega' = \omega \frac{N}{n}$$

N est le nombre de dents du plateau et n le nombre de dent du pignon.

Avec une roue libre, il en va différemment. Si le cycliste ralentit son rythme de pédalage ou même s'arrête totalement de pédaler, il continuera sur sa lancée, la vitesse angulaire de la roue arrière ne sera plus liée à la vitesse angulaire du plateau. En revanche, si le cycliste se met à accélérer, la roue arrière devra suivre le mouvement du plateau. Avec une roue libre, la relation précédente doit donc s'écrire :

$$\omega' \geq \omega \frac{r}{p}$$

ou, pour un plateau circulaire : $$\omega' \geq \omega \frac{N}{n}$$

Autrement dit, il faut prendre en compte l'énergie cinétique. Si le cycliste accélère, il emmagasine de l'énergie cinétique et lorsqu'il ralentit cette énergie cinétique est restituée et permet au cycliste de continuer à rouler. Si un cycliste appuie fort sur les pédales lorsqu'elles sont horizontales, il acquiert ainsi de l'énergie cinétique qui sera bien utile aux points morts où la poussée sur les pédales est bien plus faible.
Nous avons donc affaire à un problème de dynamique.

Vitesse angulaire constante du plateau

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique des corps F=M γ au problème présent, on obtient l'équation différentielle suivante (Voir le document « Des creux et des bosses »):

$$\frac{dV}{dt} = -g(p + f + \frac{CxV^2}{W} - \frac{P_i}{VW})$$

Pi est la puissance instantanée fournie par le cycliste correspondant au couple moteur m F_m. On rappellera que la puissance d'un couple est égale à la valeur du couple multipliée par la vitesse angulaire. Cette puissance s'écrit donc :

$$P_i = m\ \omega\ F_m$$

Pour calculer la puissance à un instant, il faut donc connaître <u>non seulement la force mais aussi la vitesse angulaire</u>. La force a été modélisée par la relation citée précédemment. Quant à la vitesse angulaire, faute de disposer de données réelles, nous ferons l'hypothèse qu'elle est constante. La puissance instantanée s'écrit alors :

$$P_i = m\ \omega\ (H\ |\cos^n\theta| + |V\sin^n\theta|$$

Cherchons quelle sera la vitesse linéaire du cycliste.

L'équation du mouvement s'écrit donc :

$$\frac{dV}{dt} = -g(p + f + \frac{CxV^2}{W} - \frac{m\ \omega(H|\cos^n\theta| + V|\sin^n\theta|)}{VW}) \qquad [3]$$

La vitesse angulaire du plateau étant supposée constante, on a la relation : $\theta = \omega t$

L'équation différentielle à résoudre est finalement :

$$\frac{dV}{dt} = -g(p + f + \frac{CxV^2}{W} - \frac{m\ \omega(H|\cos^n\omega t| + V|\sin^n\omega t|)}{VW})$$

Cette équation n'a pas de solution analytique. On peut la résoudre numériquement en écrivant :

$$\boxed{V_1 = V_0 - g(p + f + \frac{CxV^2}{W} - \frac{m\ \omega(H|\cos^n\omega t| + V|\sin^n\omega t|)}{VW})dt}$$

V_1 est la vitesse à l'instant t et V_0 est la vitesse à l'instant t-dt

La résolution de l'équation a été effectuée dans l'application 1 ci-après.

<u>Application 1</u>

On prendra un cycliste et son pédalage définis par :

W=800 N
Cx=0.2
H=30 N

$V=150$ N
$N=2$
$\omega=6.28$ rad/s (60 tr/m)
$m=0.17$ m

et une route définie par :

$p=0$
$f=0.01$

Avec ces paramètres, la puissance moyenne développée par le cycliste est de 150 watts.
Les courbes de la figure 3 montrent la variation de la vitesse du cycliste en fonction du temps. Le temps correspond aussi au nombre de tour puisque la vitesse angulaire est de 1 tr/s. A chaque valeur entière de l'unité d'abscisse, la manivelle est au point mort haut.
La courbe bleue correspond à une vitesse angulaire de 6.28 rad/s soit une cadence de 60 tr/min. Sur cette courbe, on constate que la variation de vitesse est de +/- 0.03 km/h, ce qui est probablement, pour un cycliste, très difficile à percevoir et non mesurable par le compteur de vitesse.
La seconde courbe correspond à une cadence double égale à 120 tr/min. On constate que l'amplitude des variations de la vitesse est encore plus faible.

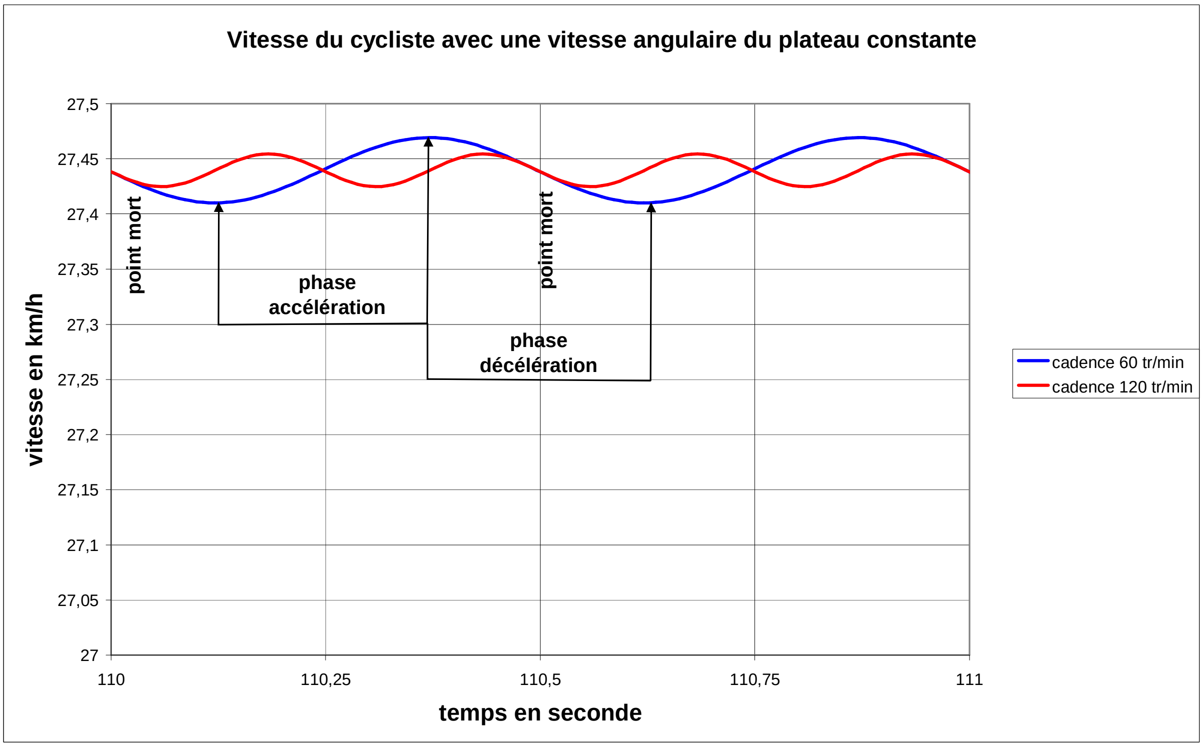

Fig.3. Vitesse du cycliste pour une vitesse angulaire de la manivelle constante

Peut-on rouler à vitesse strictement constante ?

Si l'on désire rouler à une vitesse vraiment constante, il faut adapter sa façon de pédaler en faisant varier la vitesse angulaire du plateau au cours d'un tour.

La vitesse sera constante si l'accélération dV/dt est nulle.
L'équation montre que cette condition sera réalisée si on a :

$$\omega(H\left|\cos^{n}\theta\right| + V\left|\sin^{n}\theta\right|) = \frac{VW}{m}(p + f + \frac{CxV^{2}}{W})$$

D'où l'on tire la valeur de ω en fonction de l'angle de manivelle, valeur à respecter si l'on veut une vitesse linéaire strictement constante.

$$\omega = \frac{V\left[(p+f)\,W + CxV^{2}\right]}{m(H\left|\cos^{n}\theta\right| + V\left|\sin^{n}\theta\right|)}$$

Application 2

En reprenant les données de l'application 1, la figure 4 présente la variation de la vitesse angulaire du plateau nécessaire pour que le cycliste roule à une vitesse parfaitement constante.

On constate que la vitesse instantanée angulaire varie entre 4.3 et 10.9 rad/s pour une moyenne de 6.28 rad/s. En exprimant ces valeurs en cadence, ce qui est peut-être plus parlant, pour une cadence de 60 tr/min, la cadence « instantanée » varie entre 41 et 105 tr/min.

C'est aux points morts que la vitesse angulaire est la plus forte et c'est lorsque les manivelles sont horizontales que l'on doit tourner moins vite si l'on veut rouler de façon extrêmement constante.

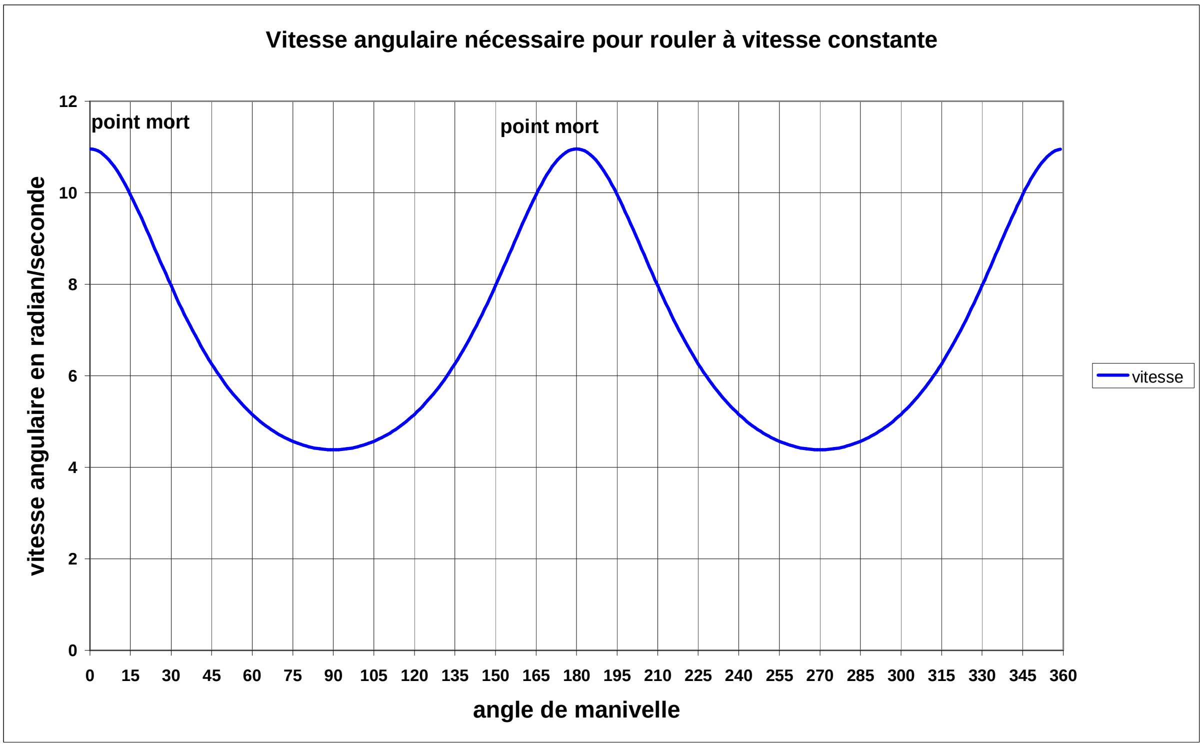

Fig.4. Vitesse angulaire pour assurer une vitesse constante

Confrontation avec des résultats expérimentaux.

Nous ne disposons pas à ce jour de nombreux résultats expérimentaux qui auraient pu permettre de confronter amplement théorie et pratique. La mesure de la vitesse de rotation instantanée nécessitant un appareillage particulier, ceci peut expliquer cela. On peut déplorer que les tests au cours desquels on mesure la valeur du couple en fonction de la position de la manivelle ne s'accompagnent pas de la mesure de la vitesse angulaire.
Nous avons cependant tiré la figure 5 du document suivant : « Nicolas Rambier. Mémoire Master. « Effet de l'utilisation du plateau O'Symétric sur la performance du cycliste ». Université de Franche Comté. UPFR des Sports. Besançon. 2013.
La courbe référencée « rond » présente une mesure effectuée avec un plateau circulaire classique et celle référencée « osym » concerne un plateau dit « ovale ». On constate donc qu'avec un plateau circulaire, le cycliste tourne avec une vitesse de rotation presque constante et qu'avec un plateau ovale il tourne avec une vitesse variant de façon importante. Il est à noter que, dans ce dernier cas, la courbe de vitesse a l'allure de la courbe théorique de l'application 2 ci-dessus donnant la vitesse de rotation nécessaire pour rouler à une vitesse constante, ce qui veut dire que le cycliste ajusterait son pédalage afin de se rapprocher d'une vitesse régulière. En revanche, dans le premier cas, la vitesse du cycliste serait plus conforme à celle de l'application 1 ci-dessus.

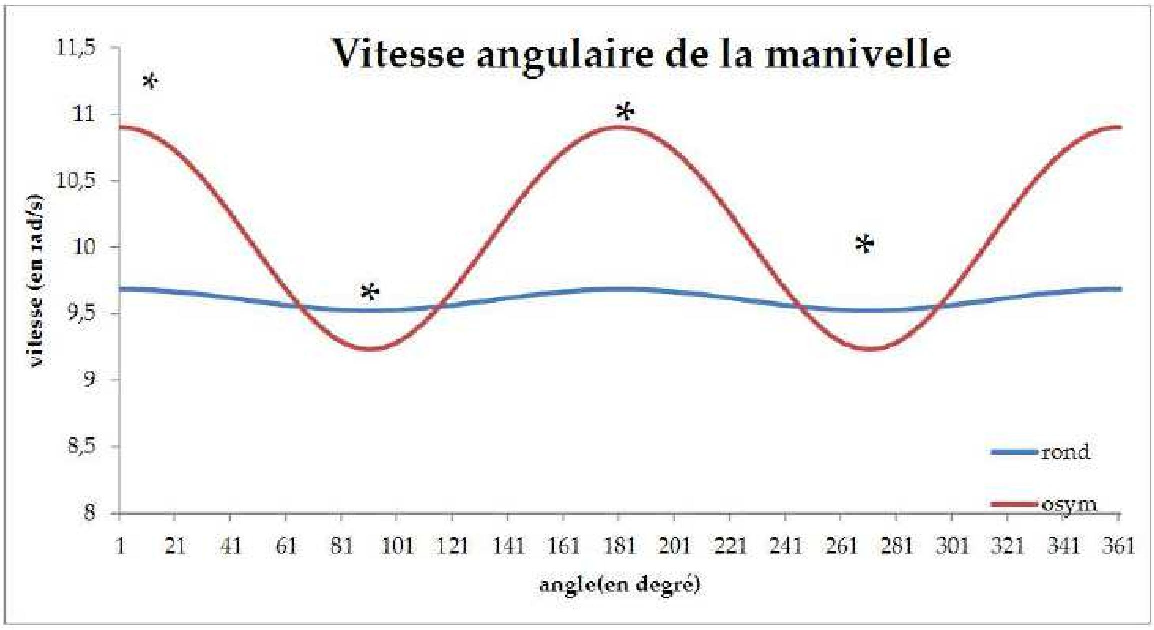

Fig. 5. Résultats expérimentaux (d'après N. Rambier)

Conclusion

Au vu de cette analyse, il paraît extrêmement difficile, sinon impossible, qu'un cycliste puisse rouler à une vitesse rigoureusement constante. Le mouvement de pédalage est très complexe et la synchronisation de l'intensité des efforts et de la vitesse angulaire ne paraît pas pouvoir être réalisée d'autant plus que les deux jambes d'un individu ne sont pas identiques en ce qui concerne l'effort sur les pédales. Nous avons modélisé le mouvement de pédalage par trois paramètres: H, V et n. Il faudrait y ajouter la vitesse instantanée angulaire.